

# Quantenfehlerkorrektur

Sebastian Smerat

14. Juli 2005  
Seminar: Quantencomputing

# Einleitung

- ▶ Ideales (fehlerfreies) Quantencomputing liefert schnelle Algorithmen
- ▶ Ideales Quantencomputing ohne Bedeutung für die Praxis
- ▶ Ohne Fehlerkorrektur sind größer skalierte Quantencomputer nicht realisierbar
- ▶ Korrektur eines Zustandes, der bei seiner Messung zerstört wird überhaupt möglich?
- ▶ Bis 1995 keine Fehlerkorrektur-Algorithmen im Quantencomputing

# Inhalt

## Klassische Fehler

Fehlerkorrektur durch Wiederholung

## Quantenfehler

Klassische Fehlerkorrektur in Quantencomputern ist unmöglich

Verschränkung mit der Umgebung

Fehlerdarstellung durch Paulimatrizen

## Quantenfehlerkorrektur

Von der Unmöglichkeit der Quantenfehlerkorrektur

Das Prinzip der Quantenfehlerkorrektur

Der 5-qubit-code

## Zusammenfassung

# Fehler in klassischen Computern

Fehler in klassischen Computern: **Bit-Flip**

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 0$

- ▶ Ohne Fehlerkorrektur liefern Berechnungen falsche Resultate
- ▶ Fehlerkorrektur bei klassischen Bits (cbits) relativ einfach

# Einfacher Code: Der Wiederholungscode

Kodiere cbits:

$$\bar{0} = 000$$

$$\bar{1} = 111$$

**Beispiel:** Ein kodiertes cbit wird durch Bit-flip verfälscht:

$$000 \rightarrow 010$$

- ▶ Zwei cbits im Zustand 0
- ▶ Ein cbit im Zustand 1

*Mehrheitsentscheidung* führt zur Korrektur:

$$000$$

# Wie gut ist der Wiederholungscode? (1)

**Beachte:** Falsche Korrektur, falls 2 Bits geflippt werden

**Frage:** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht richtig korrigierbarer Fehler auftritt?

**Annahmen:**

- ▶ Bit sei im Zustand  $\bar{0} = 000$
- ▶ Wahrscheinlichkeit für einen Bit-flip:  $p = 0.25$
- ▶ Wahrscheinlichkeit das Bit nicht geflippt wird:  $1 - p = 0.75$

$$p_{\bar{0}}(011) = 0.75 \cdot 0.25 \cdot 0.25 = 0.046875$$

$$p_{\bar{0}}(101) = 0.25 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 0.046875$$

$$p_{\bar{0}}(110) = 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 0.046875$$

$$p_{\bar{0}}(111) = (0.25)^3 = 0.015625$$

## Wie gut ist der Wiederholungscode? (2)

Für die Wahrscheinlichkeit eines nicht korrigierbaren Fehlers gilt damit:

$$\bar{p} = p_{\bar{0}}(011) + p_{\bar{0}}(101) + p_{\bar{0}}(110) + p_{\bar{0}}(111) = 0.15625$$

Es ist:

$$0.15625 < 0.25 = p$$

Die Kodierung liefert eine *Verbesserung der Fehlerwahrscheinlichkeit*.

Allgemein gilt:

$$\bar{p} = 3 \cdot (1 - p)p^2 + p^3$$

# Das Versagen des Wiederholungscode

**Frage:** Bis zu welcher Wahrscheinlichkeit  $p$  eines Bit-flips funktioniert die Fehlerkorrektur?

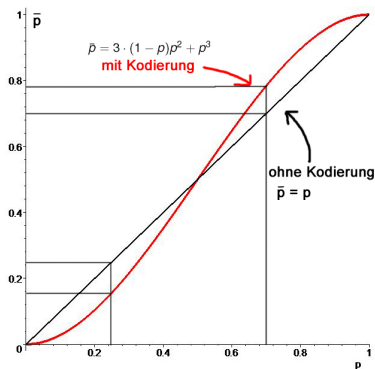
Berechne dazu:

$$\bar{p} \geq p \Leftrightarrow 3 \cdot (1 - p)p^2 + p^3 \geq p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq p \leq 1$$

**Beispiel:**

- ▶ Angenommen  $p = 0.7$
- ▶ Dann ist  $\bar{p} = 0.784$
- ▶ Wahrscheinlichkeit eines Bit-Flips ist mit Kodierung größer als ohne





# Was bisher passiert ist

Ein erster Rückblick

- ▶ Es gibt nur Bit-flip-Fehler in klassischen Computern
- ▶ Messung von cbits ist problemlos
- ▶ Fehlerkorrektur ist relativ einfach

# Der Unterschied zwischen cbits und qubits

## cbits

- ▶ Technisch realisiert durch makroskopische Anzahl von Atomen
- ▶ Diskrete Zustände 0 und 1

## qubits

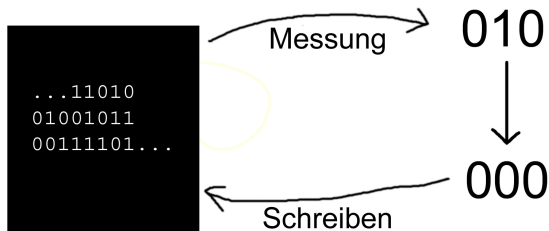
- ▶ Technisch realisiert durch einzelne Atome
- ▶ Volle Auswirkung quantenmechanischer Effekte
- ▶ Allgemeiner Zustand eines qubits:  
 $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

# Klassische Fehlerkorrektur in Quantencomputern?

**Frage:** Was passiert bei der Messung?

- ▶ Zusammenbruch der Wellenfunktion
- ▶ Das System befindet sich anschließend in einem Eigenzustand
- ▶ Die Information die in der Überlagerung verschiedener Eigenzustände enthalten war, ist **unwiederruflich verloren**

**Problem:** Prinzip der klassischen Fehlerkorrektur:



# Schlussfolgerungen für Fehlerkorrektur in Quantencomputern:

## Tatsache ist:

- ▶ Der Zustand eines Quantensystems kann nicht gemessen werden, ohne die Superposition von Eigenzuständen zu zerstören
- ▶ Klassische Fehlerkorrektur ist nicht möglich

## Brauchen:

1. Die möglichen Fehler in Quantencomputern
2. Geeignete Fehlerdarstellung
3. Kodierung der Qubits, die Messung des Fehlers ermöglicht

## Verschränkung mit der Umgebung

Quantenfehler entstehen durch **Verschränkung eines qubits mit der Umgebung**

Zustand der Umgebung:  $|e\rangle$

Verschränkung der Umgebung mit einem qubit: **Dekohärenz**

$$|e\rangle|0\rangle \rightarrow |e_0\rangle|0\rangle + |e_1\rangle|1\rangle$$

$$|e\rangle|1\rangle \rightarrow |e_2\rangle|0\rangle + |e_3\rangle|1\rangle$$

Entspricht einer unitären Zeitentwicklung des Systems.

Durch Einsetzen von  $x = 0, 1$  lässt sich bestätigen:

$$|e\rangle|x\rangle \rightarrow \left( \frac{|e_0\rangle + |e_3\rangle}{2} \mathbf{1} + \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle}{2} \mathbf{X} + \frac{|e_2\rangle - |e_1\rangle}{2} \mathbf{Y} + \frac{|e_0\rangle - |e_3\rangle}{2} \mathbf{Z} \right) |x\rangle$$

wobei

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{ZX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Fehlerdarstellung mit Pauli-Matrizen

Setze nun

$$|d\rangle = \frac{|e_0\rangle + |e_3\rangle}{2} \quad |a\rangle = \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle}{2} \quad |b\rangle = \frac{|e_2\rangle - |e_1\rangle}{2} \quad |c\rangle = \frac{|e_0\rangle - |e_3\rangle}{2}$$

Damit folgt schließlich

$$|e\rangle|x\rangle \rightarrow (|d\rangle\mathbf{1} + |a\rangle\mathbf{X} + |b\rangle\mathbf{Y} + |c\rangle\mathbf{Z})|x\rangle$$

Dies gilt auch für ein qubit in einem beliebigen Zustand  $|\Psi\rangle$   
(Linearität)

$$|e\rangle|\Psi\rangle \rightarrow (|d\rangle\mathbf{1} + |a\rangle\mathbf{X} + |b\rangle\mathbf{Y} + |c\rangle\mathbf{Z})|\Psi\rangle$$

Dies ist die **Fehlerdarstellung durch Pauli-Matrizen**

# Bedeutung der Pauli-Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &= \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle \quad \text{Bit-flip} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &= (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \quad \text{Phasenfehler} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \\ &= (-\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \quad \text{Bit-flip und Phasenfehler} \end{aligned}$$

## Erweiterung auf 2-qubit-Zustand

Die Verschränkung für ein Qubit war

$$|e\rangle|\Psi\rangle \rightarrow (|d\rangle\mathbf{1} + |a\rangle\mathbf{X} + |b\rangle\mathbf{Y} + |c\rangle\mathbf{Z})|\Psi\rangle$$

Betrachte ein System im Zustand  $|\Psi\rangle_2 = (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle)(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)$   
**Verschränkung** des Systems mit der Umgebung führt zu

$$|e\rangle|\Psi\rangle_2 \rightarrow \sum_{\mu_1=0}^3 \sum_{\mu_2=0}^3 |e_{\mu_1\mu_2}\rangle \mathbf{X}^{(\mu_1)} \otimes \mathbf{X}^{(\mu_2)} (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle)(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle).$$

wobei  $\mathbf{X}^{(0)} \equiv \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{X}^{(1)} \equiv \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}^{(2)} \equiv \mathbf{Y}$  und  $\mathbf{X}^{(3)} \equiv \mathbf{Z}$

Es treten also *Einfachfehler* und *Zweifachfehler* auf. **Beispiele** für Fehler:

$ e_{10}\rangle(\alpha_1 1\rangle + \beta_1 0\rangle)(\alpha_2 0\rangle + \beta_2 1\rangle)$	<i>Einfachfehler</i>
$ e_{13}\rangle(\alpha_1 1\rangle + \beta_1 0\rangle)(\alpha_2 0\rangle - \beta_2 1\rangle)$	<i>Zweifachfehler</i>
$ e_{22}\rangle(-\alpha_1 1\rangle + \beta_1 0\rangle)(-\alpha_2 1\rangle + \beta_2 0\rangle)$	<i>Zweifachfehler</i>



## Vereinfachung des 2-Qubit-Zustands

**Annahme:** Nur Einfachfehler

Die Verschränkung

$$|e\rangle|\Psi\rangle_2 \rightarrow \sum_{\mu_1=0}^3 \sum_{\mu_2=0}^3 |e_{\mu_1\mu_2}\rangle \mathbf{X}^{(\mu_1)} \otimes \mathbf{X}^{(\mu_2)} (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle)(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle).$$

vereinfacht sich durch die Annahme zu

$$|e\rangle|\Psi\rangle_2 \rightarrow \left( |d\rangle \mathbf{1} + \sum_{i=1}^2 (|a_i\rangle \mathbf{X}_i + |b_i\rangle \mathbf{Y}_i + |c_i\rangle \mathbf{Z}_i) \right) (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle)(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)$$

Beachte:  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} \otimes \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{1} \otimes \mathbf{X}$

**Beispiele:**

$$|a_1\rangle(\alpha_1|1\rangle + \beta_1|0\rangle)(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)$$

$$|b_2\rangle(\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle)(-\alpha_2|1\rangle + \beta_2|0\rangle)$$

# Wenn der Zustand bekannt wäre

**Annahme:** System im Zustand

$$|a_2\rangle \mathbf{X}_2 |\Psi\rangle_2$$

Wende  $\mathbf{X}_2$  an:

$$|a_2\rangle \underbrace{\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2}_{=1} |\Psi\rangle_2 = |a_2\rangle |\Psi\rangle_2$$

Beachte:

$$\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Was bisher passiert ist

Ein zweiter Rückblick

## 1. Dekohärenz

- ▶ Verschränkung des qubits mit seiner Umgebung
- ▶ Fehlerzustand:  $|e\rangle|\Psi\rangle \rightarrow (|d\rangle\mathbf{1} + |a\rangle\mathbf{X} + |b\rangle\mathbf{Y} + |c\rangle\mathbf{Z})|\Psi\rangle$

## 2. Fehlerdarstellung durch Pauli-Matrizen:

- ▶  $\mathbf{X}$  Bit-Flip       $\mathbf{Z}$  Phasenfehler       $\mathbf{Y}$  Bit-Flip & Phasenfehler
- ▶ Nur **Einfachfehler**:

$$|e\rangle|\Psi\rangle_2 \rightarrow \left( |d\rangle\mathbf{1} + \sum_{i=1}^2 (|a_i\rangle\mathbf{X}_i + |b_i\rangle\mathbf{Y}_i + |c_i\rangle\mathbf{Z}_i) \right) |\Psi\rangle_2$$

# Von der Unmöglichkeit der Quantenfehlerkorrektur

Bis 1995 kein Verfahren zur Quantenfehlerkorrektur vorhanden. Klassische Korrekturcodes sind nicht anwendbar:

- ▶ Fehlerkorrektur mittels klassischer Verfahren erfordert Messung des Zustands
- ▶ Bei Messung des Systemzustands bricht die Wellenfunktion zusammen
- ▶ Aus superponierten Zustand wird ein einzelner Eigenzustand
- ▶ Information in Überlagerung ist verloren
- ▶ Vorteile des Quantencomputing wären nicht gleichzeitig mit Fehlerkorrektur nutzbar

Quantencomputer haben eine hohe Fehleranfälligkeit. Ohne Fehlerkorrektur können Quantencomputer nicht sinnvoll genutzt werden.

**Problem:** Der Fehler muss gefunden werden, ohne den Zustand des Systems zu messen

## Was soll der Korrekturcode tun?

Betrachte einen Speicher von qubits.

Mit der Zeit tritt Dekohärenz auf

Nun wird der Korrekturcode angewendet, der das System wieder in den ursprünglichen Zustand bringt.

Solche Korrekturcodes heißen **stabilisierende Codes**

Der erste stabilisierende Code ist 1995 von **P.W. Shor** gefunden worden.

# Das Prinzip der Quantenfehlerkorrektur

1. Wahl mehrerer paarweise kommutierender Observablen
2. Kodierung der qubits  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$
3. System befinde sich nun im vereinfachten Fehlerzustand
4. Messung der komm. Observablen projiziert Zustand in einen Eigenraum
5. Kombination der Eigenwerte liefert den Fehler
6. Fehler kann nun korrigiert werden

## Paarweise kommutierenden Operatoren

Jedes qubit wird durch 5 qubits kodiert.  
Wähle

$$\mathbf{M}_{(1)} = \mathbf{X}_2 \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_4 \mathbf{X}_5$$

$$\mathbf{M}_{(2)} = \mathbf{X}_3 \mathbf{Z}_4 \mathbf{Z}_5 \mathbf{X}_1$$

$$\mathbf{M}_{(3)} = \mathbf{X}_4 \mathbf{Z}_5 \mathbf{Z}_1 \mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{M}_{(4)} = \mathbf{X}_5 \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 \mathbf{X}_3$$

Die Operatoren kommutieren und es gilt

$$\mathbf{M}_{(i)}^2 = \mathbf{1}$$

**Beachte:**

$$\mathbf{XY} = -\mathbf{YX}$$

$$\mathbf{XZ} = -\mathbf{ZX}$$

$$\mathbf{YZ} = -\mathbf{ZY}$$

oder anders ausgedrückt

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_+ = [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]_+ = [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]_+ = 0$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{X}]_- = [\mathbf{Y}, \mathbf{Y}]_- = [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}]_- = 0$$

## Kodierung der qubits

Definiere

$$|\bar{0}\rangle = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(1)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(2)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(3)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(4)})|00000\rangle$$
$$|\bar{1}\rangle = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(1)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(2)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(3)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(4)})|11111\rangle$$

Jedes  $\mathbf{M}_{(i)}$  flipt genau 2 qubits

- ▶ Jeder Term von  $|\bar{0}\rangle$  hat eine ungerade Zahl von Nullen
- ▶ Jeder Term von  $|\bar{1}\rangle$  hat eine gerade Zahl von Nullen

Damit folgt

$$|\bar{0}\rangle \perp |\bar{1}\rangle$$

Aus  $\mathbf{M}_{(i)}^2 = \mathbf{1}$  folgt  $(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(i)})^2 = 2(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(i)})$ . Damit gilt also:

$$\langle \bar{0} | \bar{0} \rangle = 1 \quad \langle \bar{1} | \bar{1} \rangle = 1$$



## Weitere Eigenschaften von $|\bar{0}\rangle$ und $|\bar{1}\rangle$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{(i)}(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(i)}) &= (\mathbf{M}_{(i)} + \mathbf{M}_{(i)}^2) = \mathbf{1} + \mathbf{M}_{(i)} \\ \Rightarrow \mathbf{M}_{(i)}|\bar{0}\rangle &= |\bar{0}\rangle \\ \Rightarrow \mathbf{M}_{(i)}|\bar{1}\rangle &= |\bar{1}\rangle\end{aligned}$$

Also ist der Zustand

$$|\bar{\Psi}\rangle = \alpha|\bar{0}\rangle + \beta|\bar{1}\rangle$$

ein Eigenzustand der  $\mathbf{M}_{(i)}$  mit dem Eigenwert 1

# Der Fehlerzustand

Das System sei in dem vereinfachten Fehlerzustand

$$\left( |d\rangle \mathbf{1} + \sum_{i=1}^5 (|a_i\rangle \mathbf{X}_i + |b_i\rangle \mathbf{Y}_i + |c_i\rangle \mathbf{Z}_i) \right) |\bar{\Psi}\rangle$$

- ▶ 16 zweidimensionale Fehlerzustände
- ▶  $2^5 = 32$  Dimensionen um die Fehlerzustände in unterschiedlichen Eigenräumen unterzubringen
- ▶ Messung der  $\mathbf{M}_{(i)}$  projiziert das System in einen Eigenraum

## Anwendung der Operatoren

**Erinnerung:**

$$\mathbf{M}_{(1)} = \mathbf{X}_2 \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_4 \mathbf{X}_5 \quad \mathbf{M}_{(2)} = \mathbf{X}_3 \mathbf{Z}_4 \mathbf{Z}_5 \mathbf{X}_1 \quad \mathbf{M}_{(3)} = \mathbf{X}_4 \mathbf{Z}_5 \mathbf{Z}_1 \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{M}_{(4)} = \mathbf{X}_5 \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 \mathbf{X}_3$$

- ▶  $\mathbf{M}_{(i)}|\bar{\Psi}\rangle = |\bar{\Psi}\rangle = \alpha|\bar{0}\rangle + \beta|\bar{1}\rangle$
- ▶  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_+ = [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]_+ = [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]_+ = 0$
- ▶  $[\mathbf{X}, \mathbf{X}]_- = [\mathbf{Y}, \mathbf{Y}]_- = [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}]_- = 0$

Wende die  $\mathbf{M}_{(i)}$  auf  $\mathbf{X}_1$  an:

$$\mathbf{M}_{(1)}\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_2\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_4\mathbf{X}_5\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_4\mathbf{X}_5|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_1\mathbf{M}_{(1)}|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle$$

$$\mathbf{M}_{(2)}\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_3\mathbf{Z}_4\mathbf{Z}_5\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_3\mathbf{Z}_4\mathbf{Z}_5\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_1\mathbf{M}_{(2)}|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle$$

$$\mathbf{M}_{(3)}\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_4\mathbf{Z}_5\mathbf{Z}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = -\mathbf{X}_1\mathbf{X}_4\mathbf{Z}_5\mathbf{Z}_1\mathbf{X}_2|\bar{\Psi}\rangle = -\mathbf{X}_1\mathbf{M}_{(3)}|\bar{\Psi}\rangle = -\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle$$

$$\mathbf{M}_{(4)}\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = \mathbf{X}_5\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle = -\mathbf{X}_1\mathbf{X}_5\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\mathbf{X}_3|\bar{\Psi}\rangle = -\mathbf{X}_1\mathbf{M}_{(4)}|\bar{\Psi}\rangle = -\mathbf{X}_1|\bar{\Psi}\rangle$$

## Anwendung der Operatoren

- ▶ Entweder kommutieren oder antikommutieren die  $\mathbf{M}_i$  mit den  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbf{Y}_i$  und  $\mathbf{Z}_i$
- ▶ Führe die Berechnungen nun für alle  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbf{Y}_i$  und  $\mathbf{Z}_i$  durch
- ▶ Kommutiert  $\mathbf{M}_{(i)}$  mit einem der Fehleroperatoren, so ergibt die Messung den Eigenwert 1.
- ▶ Antikommutation ergibt den Eigenwert  $-1$ .
- ▶ Die **16 Eigenzustände sind eindeutig identifiziert:**

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$x_2$	$y_2$	$z_2$	$x_3$	$y_3$	$z_3$	$x_4$	$y_4$	$z_4$	$x_5$	$y_5$	$z_5$
$\mathbf{M}_{(1)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$\mathbf{M}_{(2)}$	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
$\mathbf{M}_{(3)}$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
$\mathbf{M}_{(4)}$	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1

Wird viermal der Eigenwert 1 gemessen, so ist kein Fehler aufgetreten

## Beispiel für Fehlerkorrektur

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$x_2$	$y_2$	$z_2$	$x_3$	$y_3$	$z_3$	$x_4$	$y_4$	$z_4$	$x_5$	$y_5$	$z_5$
$M_{(1)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$M_{(2)}$	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$M_{(3)}$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
$M_{(4)}$	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1

### Beispiel:

1. Zustand des Systems:  $(|d\rangle \mathbf{1} + \sum_{i=1}^5 (|a_i\rangle \mathbf{X}_i + |b_i\rangle \mathbf{Y}_i + |c_i\rangle \mathbf{Z}_i)) |\bar{\Psi}\rangle$
2. Messung der Operatoren  $M_{(1)}$ ,  $M_{(2)}$ ,  $M_{(3)}$  und  $M_{(4)}$
3. Eigenwerte 1, -1, 1 und 1
4. Zustand des Systems  $|c_1\rangle \mathbf{Z}_1 |\bar{\Psi}\rangle$
5. Wende  $\mathbf{Z}_1$  an:  $|c_1\rangle \underbrace{\mathbf{Z}_1^2}_{=1} |\bar{\Psi}\rangle = |c_1\rangle |\bar{\Psi}\rangle$
6. Der Fehler ist korrigiert

# Was bisher passiert ist

## Ein dritter Rückblick

### 1. Quantenfehlerkorrektur unmöglich?

### 2. Stabilisierender 5-qubit-Code:

- ▶ Operatoren  $\mathbf{M}_{(1)}$ ,  $\mathbf{M}_{(2)}$ ,  $\mathbf{M}_{(3)}$ ,  $\mathbf{M}_{(4)}$
- ▶ Kodierung der qubits:
  - ▶  $|\bar{0}\rangle = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(1)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(2)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(3)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(4)})|00000\rangle$
  - ▶  $|\bar{1}\rangle = \frac{1}{4}(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(1)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(2)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(3)})(\mathbf{1} + \mathbf{M}_{(4)})|11111\rangle$
- ▶ Messung der  $\mathbf{M}_{(i)}$  projiziert den Fehlerzustand in einen Eigenraum
- ▶ Eigenwerte identifizieren den Fehler **eindeutig**
- ▶ Anwendung des Fehleroperators ergibt den ursprünglichen Zustand

### 3. Quantenfehlerkorrektur ist **möglich**

# Zusammenfassung

## 1. Klassische Fehler

- ▶ Nur Bit-flips
- ▶ Fehlerkorrektur durch Messung unproblematisch

## 2. Quantenfehler

- ▶ Verschränkung mit Umgebung
- ▶ Fehlerdarstellung durch Paulimatrizen
- ▶ Dadurch Fehleranzahl diskretisiert und endlich

## 3. Quantenfehlerkorrektur

- ▶ Kodierung der qubits
- ▶ Fehlererkennung durch Messung der  $\mathbf{M}_{(i)}$  und Projektion in einen Eigenraum
- ▶ Fehlerkorrektur durch Anwendung des gefundenen Fehleroperators  $\mathbf{X}^{(i)}$