

Übungsblatt 9

1. Variationsrechnung

Sei G das Funktional einer Funktion $f(x)$. Die Funktionalableitung $\frac{\delta G[f]}{\delta f(x)}$ ist bestimmt ist durch

$$G[f + \delta f] - G[f] = \int dx \frac{\delta G[f]}{\delta f(x)} \delta f(x)$$

Betrachten Sie als Beispiel die Funktionale

$$P[r] = \int_0^{2\pi} d\theta r(\theta) \quad \text{und} \quad A[r] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta r^2(\theta),$$

die Umfang und Fläche von geschlossenen Kurven $r(\theta)$ in der Ebene liefern.

- i. Bestimmen Sie die Funktionalableitungen $\frac{\delta P[r]}{\delta r(\theta)}$ und $\frac{\delta A[r]}{\delta r(\theta)}$.
- ii. Ein Funktional der Form $G[f] = \int dx g(f(x))$ heisst *lokal*. Bestimmen Sie die erste und zweite Funktionalableitung von $G[f]$.
- iii. Bestimmen Sie die Kurve $r(\theta)$ der Länge l mit dem größten Flächeninhalt. Minimieren Sie dazu das Euler-Lagrange Funktional $A[r] - \mu (P[r] - l)$.