Übungsblatt 5

1. *harmonischer Oszillator & zweite Quantisierung*

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ und definieren Sie den Operator $a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\, q + i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\, p$ sowie den adjungierten Operator $a^\dagger$.

i. Arbeiten Sie zunächst in der Ortsraum Darstellung (d.h. $p = -i\frac{d}{dq}$).

(a) Bestimmen Sie die Grundzustands Wellenfunktion $\Phi_0(q)$ und berechnen Sie $a\,\Phi_0(q)$.

(b) Bestimmen Sie die Funktionen $\Phi_{n+1}(q) = \sqrt{\frac{1}{n+1}} a^\dagger \Phi_n(q)$ für $n < 2$ und verifizieren Sie, dass sie Eigenfunktionen der Schrödinger Gleichung sind.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von q und q^2 für die Zustände $\Phi_0(q)$ und $\Phi_1(q)$.

(d) Verifizieren Sie die Kommutatoren $[a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger]$ und $[a, a^\dagger] = 1$.

(e) Zeigen Sie, dass $H = \omega\left(a^\dagger a\ + \frac{1}{2}\right)$

(f) Drücken Sie p und q durch die Operatoren a und $a^\dagger$ aus.

ii. Arbeiten Sie nun mit der Darstellung $H = \omega\left(a^\dagger a\ + \frac{1}{2}\right)$. Definieren Sie $|0\rangle = \Phi_0(q)$ und nutzen Sie nur noch die Eigenschaft $a|0\rangle = 0$ dieses Zustandes ("Vakuumzustand").

(a) Definieren Sie $|n+1\rangle = \sqrt{\frac{1}{n+1}} a^\dagger |n\rangle$.

(b) Zeigen Sie per Induktion, dass $a^\dagger a\ |n\rangle = n|n\rangle$ und bestimmen Sie $H|n\rangle$ für beliebiges n.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von q und q^2 für die Zustände $|n\rangle$ für beliebiges n.

2. *Phononen eines Dreiecksgitters*

i. Betrachten Sie ein Dreiecksgitter mit primitiven Translationen $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$ und $\mathbf{a}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Bestimmen Sie die zugehörige reziproke Basis. Welches Gitter spannt diese Basis auf? Welche Form hat die Brillouin-Zone?

ii. Seien $x_{m,n}$ und $y_{m,n}$ die kartesischen Komponenten der Auslenkung $\mathbf{r}_{\mathrm{l}_{m,n}}$ des Atoms mit der Gleichgewichtslage $\mathbf{l}_{m,n} = m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2$. Sei ferner $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Zeigen Sie, dass die potentielle Energie für das Dreiecksgitter mit ideale Federn zwischen Nachbaratomen gegeben ist durch

$$V = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\sum_{i=1}^{3}\left[(\mathbf{r}_{\mathrm{l}_{n,m}} - \mathbf{r}_{\mathrm{l}_{n,m}+\mathrm{a}_i})\cdot\mathbf{a}_i\right]^2 .$$

Bestimmen Sie die zugehörige dynamische Matrix.

iii. Transformieren Sie die dynamische Matrix in den **k**-Raum und zeigen Sie, dass sich mit $c_i = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i)$ für die Foruiertransformierte ergibt

$$D_\mathrm{k} = \begin{pmatrix} 3 - 2c_1 - \frac{1}{2}(c_2 + c_3) & \frac{\sqrt{3}}{2}(c_3 - c_2) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(c_3 - c_2) & 3 - \frac{3}{2}(c_2 + c_3) \end{pmatrix} .$$

Diagonalisieren Sie D_k und zeichnen Sie die Eigenwerte entlang des geschlossenen Pfades von $\mathbf{k} = (0,0)$ via $(4\pi/3, 0)$ und $(\pi, \pi/\sqrt{3})$ zurück nach $(0,0)$. Zeichnen Sie den Pfad in der Brillouin-Zone ein.

iv. Entwickeln Sie D_k bis zur zweiten Ordnung um $\mathbf{k} = 0$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Eigenvektoren und **k**. Entwickeln Sie die Eigenwerte bis zur ersten Ordnung in **k**, um longitudinale und transversale Schallgeschwindigkeit zu bestimmen.