Seminar Quanten-Computing, Grundlagen der Quantenmechanik

Patrick González, 214637

23. Juni 2005

Zusammenfassung

Die Grundlagen der Quantenmechanik sind ein Gebiet das seit der Entwicklung der Quantenmechanik, in den zwanziger-und dreiziger Jahren des letzten Jahrhunderts, viele Fragen hervorgerufen hat. Die Frage nach der Vollständigkeit der Quantenmechanik wurde zum Beispiel durch [1] Einstein, Podolsky und Rosen negativ beantwortet. Mit Hilfe der Experimenten von (u.a.) Alain Aspect und seine Mitarbeiter sind wir jetzt in der Lage die philosophische Fragen (wie zum Beispiel die der Vollständigkeit oder der Lokalität) experimentell zu beantworten. Wir werden sehen daß das Konzept der Verschränktheit eine sehr wichtige Rolle einnehmen wird.

1 Einführung

Es ist nicht Ziel dieses Artikels eine vollständige Übersicht der verschiedenen Interpretationen der Quantenmechanik zu geben. Mehr dazu findet man zum Beispiel in [2] oder [3]. Wir werden uns auf dem Standpunkt einer [2] minimalen Interpretation stellen:

1. Die Quantenmechanik ist ein Schema welches uns ermöglicht die (Wahrscheinlichkeits) Verteilung der Ergebnisse der Messungen eines Ensembles (eine große Zahl von gleich präparierten Systemen) vorherzusagen.

2. Die Wahrscheinlichkeiten werden *statistisch* interpretiert: Sie sind die relative Frequenzen womit verschiedene Messergebnisse auftreten wenn die Messungen genügend oft widerhohlt werden.

Bekanntlich gilt: Wenn das System in einem Zustand $|\psi\rangle$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von der Observabele A den Eigenwert a_i (gehörende zu dem Zustand $|a_i\rangle$) zu finden gleich;

$$\mathrm{Prob}(a_i) = \langle\psi|P_{a_i}|\psi\rangle = \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = |\langle a_i|\psi\rangle|^2.$$

Diese statistische Interpretation ermöglicht uns zum Beispiel die Heisenbergsche Unschärferelation folgendermaße zu interpretieren: Wir betrachten ein Ensemble von gleich präparierten Systemen die allen im Zustand $|\psi\rangle$ sind. Wenn wir bei einigen Systemen die Observable A messen, und bei einigen Systemen die Observable B messen, wobei die Observablen A und B inkommensurabel sind, dann wird das Produkt der Streuungen nie Null werden; $(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \hbar/2$. Wie schon erwähnt ist es heutzutage möglich fundamentale Problemen der Quantenmechanik (insbesondere die einer lokal-realistischen Theorie) experimentell zu beantworten. Verschränktheit und die Bell'sche Ungleichung werden dabei von fundamentaler Bedeutung sein.

2 Verschränktheit

Die Mathematik die die Quantenmechanik zugrunde liegt ist die des Hilberaums. Bekanntlich ist der Hilbertraum $\mathcal{H}$ eines zusammengestellten Systems das Tensorprodukt der beiden Teilhilberträume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Verschränktheit ist die Tatsache daß es Vektoren (Zustände) in $\mathcal{H}$ gibt die nicht geschrieben werden können als Tensorprodukt zweier Vektoren $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$ und die deshalb nicht mit einzelnen Zuständen der Subsyteme identifiziert werden können. Man überzeugt sich leicht daß der Zustand[1] (der spin-Singlet) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle\big)$ ein verschränkter Zustand ist. Die physikalische Bedeutung verschränkten Zustände ist zweifach:

- Die Teilchen (oder Systeme) die einen verschränkten Zustand aufbauen besitzen keine Individualität (dies werden wir später präzisieren).
- Die Teilchen (oder Systeme) die einen verschränkten Zustand aufbauen sind hoch-korreliert.

Die Korrelation wird bei der Diskussion der Bell'schen Ungleichungen sehr nützlich sein. Dann jetzt zur Individualität. In vielen Experimenten besteht das physikalische System aus einem Ensemble von Teilchen welches nicht mit Hilfe *einer* Zustandsfunktion beschrieben werden kann. Der Dichteoperatorformalismus ist dann eine bequeme Formulierung dieses Systems. Bekanntlich wird der Dichteoperator definiert durch:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

wobei die p_i die einzelne Wahrscheinlichkeiten sind bei einer Messung das System im Zustand $|\psi_i\rangle$ anzutreffen. Die Menge $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$ heißt *Ensemble von reinen Zuständen*. Betrachten wir zum Beispiel ein zusammengestelltes spin-$\frac{1}{2}$ System im verschränkten Zustand (EPR-Paar) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\big)$. Dann ist:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0|\langle 0| + \langle 1|\langle 1|\big).$$

Der [4] reduzierte Dichteoperator des ersten Systems ist gleich:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^1 &= \mathrm{tr}_2(\hat{\rho}) = \frac{\mathrm{tr}_2(|0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0|) + \mathrm{tr}_2(|1\rangle|1\rangle\langle 0|\langle 0|) + \mathrm{tr}_2(|0\rangle|0\rangle\langle 1|\langle 1|) + \mathrm{tr}_2(|1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1|)}{2} \\
&= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} = \frac{I}{2}.
\end{aligned}$$

Man sieht direkt daß die einzelne Dichteoperatoren beider Teilchen gerade die reduzierte Dichteoperatoren sind. Jedoch kann man aus diesen Operatoren nicht

[1] Im Folgenden werden wir $|0\rangle$ und $|1\rangle$ als Basiszustände eines spin-$\frac{1}{2}$ Systems benutzen.

den Dichteoperators des verschränkten Paars herstellen. Der Dichteoperator des verschränkten Paars ist eine Linearkombination von Tensorprodukten von Ein-Teilchen Dichteoperatoren. Es folgt weiter: $\mathrm{tr}((\hat{\rho}_1)^2) = \frac{1}{2} < 1$. Wir sehen daß obwohl das EPR-Paar in einem reinen Zustand ist, wir von den einzelnen spin-$\frac{1}{2}$ Systemen keine maximale Information besitzen. Es macht daher kein Sinn von den *einzelnen Systemen* zu reden, die Individualität ist verloren gegangen.

3 Die Bell'sche Ungleichungen

Die experimentelle Überprüfungen der Bell'sche Ungleichungen ermöglichen eine Aussage über lokal-realistische Theorien. Eine lokal-realistische Theorie genügt: (übernommen von B. d'Espagnat [5])

- **Realismus:** Regularities in observed phenomena are caused by some physical reality whose existence is independent of human observation.
- **Induktion:** Inductive inference is a valid mode of reasoning and can be applied freely, so that legitimate conclusions can be drawn from observed phenomena. In an inductive inference we form a conclusion regarding unobserved events based on the evidence provided by observed events.
- **Separabilität (Lokalität):** It is impossible for a cause in one location to produce an effect in a second location if the two events are space-like separated.

Die Bell'sche Ungleichungen sind eine direkte Konsequenz einer lokal-realistischen Theorie; dazu betrachten wir folgendes Experiment. Eine Teilchenquelle ermöglicht die Präparation von zwei Teilchen im spin-singlet Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\big)$, auf welche Weise die Teilchen präpariert werden ist in unserem Experiment nicht wichtig, der springende Punkt allerdings ist daß die Präparation der Teilchen beliebig oft (exakt) wiederhohlbar ist. Nach dieser Präparation sendet die Teilchenquelle die zwei Teilchen aus; eins nach Alice und eins nach Bob. Alice und Bob haben beide ein (identisches) Messgerät, daß die Messung von den Spins in der x- bzw. z-Richtung ermöglicht. Wir konzentrieren uns jetzt auf Alice. Sobald Alice ihres Teilchens empfängt macht sie eine Messung bezüglich der z- oder x-Achse. Die Wahl der Achse geschieht willkürlich. Falls sie bezüglich der z-Achse gemessen hat notiert sie das Ergebnis als A_Z und falls sie bezüglich der x-Achse gemessen hat notiert sie das Ergebnis als A_X. (Beachte daß sowohl A_Z als A_X nur ± 1 als Ergebnis liefern können). Falls Alice z.B. "spin-down" bezüglich der z-Achse mißt, weiß sie jetzt mit Sicherheit daß das Teilchen von Bob "spin-up" bezüglich der z-Achse haben muß. Diese Überlegung gilt natürlich auch für eine Messung von Alice bezüglich der x-Achse. Alice weißt jetzt ohne Bobs Teilchen zu stören (d.h. zu messen) mit Sicherheit (d.h. Wahrscheinlichkeit gleich Eins) den Spin von Bobs Teilchen. Die Spins des Teilchens Bobs sind im Sinne von [1][2] Elemente der Realität, d.h. die Spins sind objektive physikalische Eigenschaften die Bobs Teilchen hat (Realismus). Betrachten wir jetzt Bob. Bob kann ebenfalls bezüglich der z- oder x-Achse messen. Sobald Bob sein Teilchen empfängt wählt

[2] "If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e. with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity."

er auch willkürlich bezüglich welcher Achse er messen will, falls er bezüglich der z-Achse gemessen hat notiert er das Ergebnis als B_Z, falls er bezüglich der x-Achse gemessen hat notiert er das Ergebnis als B_X. Als mögliche Messergenisse erhält Bob natürlich nur ± 1 für sowohl B_Z als B_X. Die beide Messgeräte sind raumartig voneinander entfernt, d.h daß die Messungen die Alice macht keinen Einfluß haben können über die Messungen die Bob macht (Separabilität). Da Bob, wegen der raumartige Entfernung, wenn er mißt nicht wissen kann welche Messung Alice gemacht hat, folgert er (mit der gleichen Argumentation als bei Alice) daß die Spins des Teilchens von Alice *auch* objektive physikalische Eigenschaften des Teilchens sind. Bis jetzt haben wir nur *ein* Teilchenpaar betrachtet. Nach Voraussetzung ist die Präparation der Teilchen im Spin-singlet Zustand beliebig oft exakt wiederhohlbar. Alice und Bob machen nun ihre Messungen, wie oben beschrieben, an viele Teilchenpaaren und es folgt (Induktion) daß es in *jedem* Teilchenpaar immer ein Teilchen mit der Eigenschaft *spin-up bzgl. der z-Achse* gibt und ein Teilchen mit der Eigenschaft *spin-down bzgl. der z-Achse.* Analog folgt daß es in jedem Teilchenpaar ein Teilchen mit der Eigenschaft *spin-up bzgl. der x-Achse* gibt und ein Teilchen mit der Eigenschaft *spin-down bzgl. der x-Achse.* Die Spins der Teilchen sind also objektive Eigenschaften der Teilchen. Wir betrachten nun die Variablen A_Z, A_X, B_Z und B_X. die interpretiert werden als die Werte die die Spins beider Teilchen haben. Dazu betrachten wir folgende neue Variable:

$$G := A_Z B_Z + A_X B_Z + A_X B_X - A_Z B_X$$

Es folgt:

$$G = (A_Z + A_X) B_Z + (A_X - A_Z) B_X = \begin{cases} \pm 2 B_Z, & \text{falls } A_Z = A_X \\ \pm 2 B_X, & \text{falls } A_Z \neq A_X \end{cases}$$

Also $G = \pm 2$ da $B_Z, B_X = \pm 1$. Es sei nun $p(a_Z, a_X, b_Z, b_X)$ die Wahrscheinlichkeit dafür daß die Spins der Teilchen vor den Messungen die Werte $A_Z = a_Z, A_X = a_X$ usw. haben (hier wird wieder explizit von der Annahme des Realismus ausgegangen!). Die Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion der experimentellen Parameters. Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeit können wir den Erwartungswert der Variable G bilden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= \mathbb{E}(A_Z B_Z + A_X B_Z + A_X B_X - A_Z B_X) \\ &= \sum_{a_Z, a_X, b_Z, b_X} p(a_Z, a_X, b_Z, b_X) \underbrace{(a_Z b_Z + a_X b_Z + a_X b_X - a_Z b_X)}_{\pm 2} \\ &\leq \sum_{a_Z, a_X, b_Z, b_X} p(a_Z, a_X, b_Z, b_X) \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Die Erwartungswertbildung ist aber additiv und es folgt:

$$\mathbb{E}(A_Z B_Z) + \mathbb{E}(A_X B_Z) + \mathbb{E}(A_X B_X) - \mathbb{E}(A_Z B_X) \leq 2. \tag{2}$$

Gleichung (2) ist die berühmte Bell'sche Ungleichung.

Bis jetzt haben wir die Quantenmechanik außer unserer Betrachtung gelassen. Quantenmechansich erfolgt obige Rechnung über den Observablen, wobei die

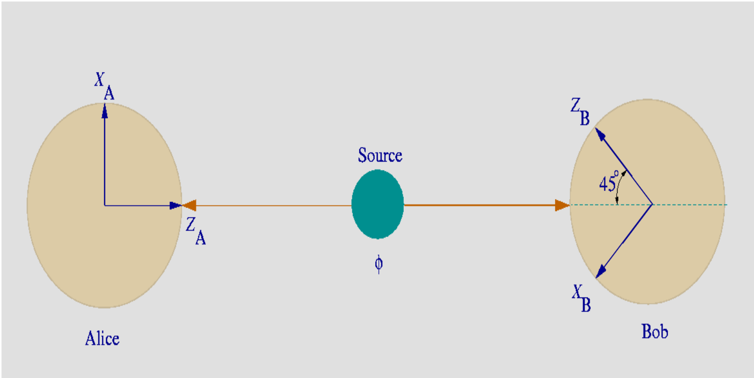

Abbildung 1: Die Koordinatensysteme von Alice und Bob

Achsen des Messgeräts von Bob gedreht sind bzgl die Achsen von Alice (siehe Abbildung 1):

$$A_Z = \sigma_X^{(A)}, \quad B_Z = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_Z^{(B)} + \sigma_X^{(B)})$$

$$A_X = \sigma_Z^{(A)}, \quad B_X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_Z^{(B)} - \sigma_X^{(B)})$$

Die verschiedene Erwartungswerte sind dann:

$$\langle A_Z B_Z \rangle = \langle A_X B_Z \rangle = \langle A_X B_X \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; \langle A_Z B_X \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \langle A_Z B_Z \rangle + \langle A_X B_Z \rangle + \langle A_X B_X \rangle - \langle A_Z B_X \rangle = 2\sqrt{2} \tag{3}$$

Gleichung (3) ist deutlich im Widerspruch zur Gleichung (2)! Im Laufe der Zeit sind verschiedene Experimente durchgeführt [5], bis auf zwei Experimenten haben Gleichung (3) bestätigt! Die Bell'schen Ungleichungen, die direkt aus den Annanmen einer lokal-realistischen Theorie folgen, können also nicht richtig sein! Es könnte so sein daß in der Herleitung von Gleichung (2) irgendwo ein falsches Argument benutzt worden ist, oder daß eine weitere (versteckte) Annahme miteinbezogen worden ist. Nun, die Herleitung von Gleichung (2) bezieht sich auf die elementare Logik und Wahrscheinlichkeitstheorie und bisher sind noch keine versteckte Annahmen gefunden. Wir werden gezwungen die drei fundamentale Annahmen als möglich falsch zu betrachten (präziser: mindestens eine Annahme müssen wir fallen lassen). Nach meiner Meinung sind die erste zwei Annahmen zu fundamental (oder selbstevident!) um sie fallen zu lassen. Ohne diese zwei Annahmen wird die Physik (oder allgemeiner: die Naturwissenschaft) trivial und leer. Die Erforschung der Natur wird das Verfolgen eines Phantoms sein! Der Physiker will nicht nur wissen daß, "spin-up" gemessen worden ist, oder Vorhersagen, daß spin-up gemessen werden wird, sondern er will auch wissen *warum* spin-up gemessen worden ist oder wird! Wenn wir die ersten zwei Annahmen behalten wollen müssen wir also die Forderung der Lokalität aufgeben. Die Lokalität besagt ja (im Kontext unseren Experiments) daß die Messung einer Spinkomponente des einen Teilchens keinen Einfluß haben kann auf die Messung eines Spinkomponents des anderen Teilchens, wenn die Messgeräte weit voneinander (im Sinne der speziellen Relativität: raumartig) entfernt sind. Wenn zwei Ereignisse raumartig voneinder entfernt sind, müßte solch ein hypothetischer Einfluß mit Überlichtgeschwindigket propagieren. Wenn wir diese Forderung aufgeben, verletzen wir nicht unbedingt die spezielle Relativität die ja besagt das die Signalgeschwindigkeit die Effekt und Ursache miteinander verbindet nicht mit Überlichtgeschwindigkeit propagieren kann. Eine kleine Modifizierung unserer Ideen ist nur erforderlich: Es gibt keinen Einfluß der mit Überlichtgeschwindigkeit propagiert zwischen zwei Ereignisse die man kausal verbinden kann, es kann nur so einen Einfluß geben wenn die zwei Ereignisse eine *gemeinsame Ursache* haben. In unserem Fall ist die gemeinsame Ursache die Teilchenquelle die verschränkte Teilchen emittiert!.

Literatur

[1] A. Einstein, B. Podolsky, N Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Really Be Considered Complete*, Physical Review Letters, Mai 1935

[2] C. Isham: *Lectures on Quantum Theory*, Imperial College Press, 2001

[3] F. Laloë: *Do we really understand Quantum Mechanics? Strange Correlations, paradoxes and theorems*, American Journal of Physics, Juni 2001

[4] M.A. Nielsen and I.L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information* Cambridge University Press, 2000

[5] B. d'Espagnat: *The Quantum Theory and Reality*, Scientific American, Nov. 1979